Po co matematykowi prawdopodobieństwo?

Ireneusz Krech

2-kolorowanie zbioru

Niech $[n] = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

2-kolorowanie zbioru

Niech $[n] = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Definicja

Dowolną funkcję $h : [n] \to \{1, 2\}$ nazywamy *2-kolorowaniem zbioru* $[n]$.

2-kolorowanie zbioru

Niech $[n] = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Definicja

Dowolną funkcję $h : [n] \to \{1, 2\}$ nazywamy *2-kolorowaniem zbioru* $[n]$.

Przykład

Ustalmy, że liczbie 1 odpowiada kolor czerwony, a liczbie 2 kolor niebieski. Rozważmy zbiór $[8]$ oraz funkcję $h : [8] \to \{1, 2\}$ określoną jak poniżej:

1 2 3 4 5 6 7 8

Funkcja h jest 2-kolorowaniem zbioru $[8]$.

Zbiór monochromatyczny

Definicja

Zbiór $T \subseteq [n]$ jest *monochromatyczny (względem h)*, jeżeli odwzorowanie h jest stałe na T.

Liczby van der Waerdena

Definicja

Najmniejszą liczbę naturalną n taką, że dla dowolnego 2-kolorowania zbioru $[n]$ istnieje monochromatyczny ciąg arytmetyczny o długości $k \in \mathbb{N}_2$ nazywamy *liczbą van der Waerdena* i oznaczamy ją przez $W(k)$.

Przykład

Najmniejszą liczbą naturalną, dla której istnieje monochromatyczny ciąg arytmetyczny o długości $k = 2$, jest liczba $n = 3$. Jakkolwiek podzielimy zbiór $[3]$ na dwa podzbiory, to zawsze otrzymamy ciąg arytmetyczny, gdyż każde dwie liczby tworzą ciąg arytmetyczny.

Przykład

Najmniejszą liczbą naturalną, dla której istnieje monochromatyczny ciąg arytmetyczny o długości $k = 2$, jest liczba $n = 3$. Jakkolwiek podzielimy zbiór [3] na dwa podzbiory, to zawsze otrzymamy ciąg arytmetyczny, gdyż każde dwie liczby tworzą ciąg arytmetyczny.

$$\color{red}{1} \quad \color{red}{2} \quad \color{red}{3}$$

$$\color{red}{1} \quad \color{red}{2} \quad \color{blue}{3}$$

$$\color{red}{1} \quad \color{blue}{2} \quad \color{blue}{3}$$

$$\color{red}{1} \quad \color{blue}{2} \quad \color{red}{3}$$

$$\color{blue}{1} \quad \color{blue}{2} \quad \color{blue}{3}$$

$$\color{blue}{1} \quad \color{blue}{2} \quad \color{red}{3}$$

$$\color{blue}{1} \quad \color{red}{2} \quad \color{red}{3}$$

$$\color{blue}{1} \quad \color{red}{2} \quad \color{blue}{3}$$

Dla $k = 3$ liczba $W(3) = 9$.

Dla $k = 3$ liczba $W(3) = 9$.

Dla liczby $n = 8$, a zatem również dla każdej liczby naturalnej $n \leq 8$, istnieje 2-kolorowanie zbioru $[n]$, które nie zawiera żadnego monochromatycznego podciągu arytmetycznego o długości trzy. Przykładem takiego kolorowania jest:

$$\color{red}{1} \quad \color{blue}{2} \quad \color{red}{3} \quad \color{blue}{4} \quad \color{blue}{5} \quad \color{red}{6} \quad \color{blue}{7} \quad \color{red}{8}$$

Dla $k = 3$ liczba $W(3) = 9$.

Dla liczby $n = 8$, a zatem również dla każdej liczby naturalnej $n \leq 8$, istnieje 2-kolorowanie zbioru $[n]$, które nie zawiera żadnego monochromatycznego podciągu arytmetycznego o długości trzy. Przykładem takiego kolorowania jest:

1 2 3 4 5 6 7 8

Dla $n \leq 7$ wystarczy rozważyć kolorowania:

1 2 3 4 5 6 7

1 2 3 4 5 6

1 2 3 4 5

1 2 3 4

Kolorując dwoma kolorami zbiór [9] zawsze znajdziemy monochromatyczny ciąg arytmetyczny o długości trzy. Poniżej kilka spośród 512 kolorowań zbioru [9]:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Wyznaczenie dokładnych wartości liczb van der Waerdena jest zadaniem bardzo żmudnym, dlatego stosuje się pewne oszacowania tych liczb.

Wyznaczenie dokładnych wartości liczb van der Waerdena jest zadaniem bardzo żmudnym, dlatego stosuje się pewne oszacowania tych liczb.

Twierdzenie

Dla każdej liczby naturalnej $k \geq 2$

$$W(k) > 2^{k/2}. \tag{1}$$

Naiwna metoda probabilistyczna

Naiwna metoda probabilistyczna opiera się na następującej obserwacji: jeżeli dla danego zbioru elementów prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany element nie ma danej własności jest mniejsze od 1, to musi istnieć element, który ma tę własność.

Dowód:

Niech (Ω, p) będzie dyskretną przestrzenią probabilistyczną, gdzie zbiór Ω składa się ze wszystkich 2-kolorowań zbioru $[n]$. Jest więc

$$|\Omega| = 2^n \qquad \text{oraz} \qquad p(\omega) = \tfrac{1}{2^n} \text{ dla każdego } \omega \in \Omega.$$

Dowód:

Niech (Ω, p) będzie dyskretną przestrzenią probabilistyczną, gdzie zbiór Ω składa się ze wszystkich 2-kolorowań zbioru $[n]$. Jest więc

$$|\Omega| = 2^n \qquad \text{oraz} \qquad p(\omega) = \frac{1}{2^n} \text{ dla każdego } \omega \in \Omega.$$

Rozważmy k-wyrazowy podciąg arytmetyczny (a_s) ciągu $(1, 2, 3, \ldots, n)$. Niech A_s oznacza zdarzenie, że zbiór S złożony z wyrazów podciągu (a_s) jest monochromatyczny.

Dowód:

Niech (Ω, p) będzie dyskretną przestrzenią probabilistyczną, gdzie zbiór Ω składa się ze wszystkich 2-kolorowań zbioru $[n]$. Jest więc

$$|\Omega| = 2^n \qquad \text{oraz} \qquad p(\omega) = \frac{1}{2^n} \text{ dla każdego } \omega \in \Omega.$$

Rozważmy k-wyrazowy podciąg arytmetyczny (a_s) ciągu $(1, 2, 3, \ldots, n)$. Niech A_s oznacza zdarzenie, że zbiór S złożony z wyrazów podciągu (a_s) jest monochromatyczny.

Wówczas

$$|A_s| = 2 \cdot 2^{n-k}.$$

Dowód:

Równość ta wynika z faktu, że mając ustalonych k elementów w zbiorze $[n]$ można je pokolorować jednym z dwóch dostępnych kolorów, a pozostałe $n-k$ elementy pokolorować dowolnie na 2^{n-k} sposobów.

Dowód:

Równość ta wynika z faktu, że mając ustalonych k elementów w zbiorze $[n]$ można je pokolorować jednym z dwóch dostępnych kolorów, a pozostałe $n-k$ elementy pokolorować dowolnie na 2^{n-k} sposobów.

Tak więc

$$\mathbf{P}(A_s) = \frac{|A_s|}{|\Omega|} = \frac{2 \cdot 2^{n-k}}{2^n} = 2^{1-k}.$$

Dowód:

Równość ta wynika z faktu, że mając ustalonych k elementów w zbiorze $[n]$ można je pokolorować jednym z dwóch dostępnych kolorów, a pozostałe $n-k$ elementy pokolorować dowolnie na 2^{n-k} sposobów.

Tak więc
$$\mathbf{P}(A_s) = \frac{|A_s|}{|\Omega|} = \frac{2\cdot 2^{n-k}}{2^n} = 2^{1-k}.$$

Podanie dokładnej liczby wszystkich możliwych ciągów arytmetycznych o długości k jest zadaniem żmudnym. Można oszacować tę liczbę z góry. Każdy ciąg arytmetyczny jest wyznaczony jednoznacznie przez dwa pierwsze elementy, a równocześnie każdy ciąg arytmetyczny wyznacza zbiór S. Rodzinę wszystkich zbiorów typu S oznaczmy przez $\mathfrak{S}$.

Dowód:

Na pewno liczba wszystkich ciągów nie będzie większa niż $\binom{n}{2}$ (będzie oczywiście mniejsza - TO WIDAĆ - ponieważ nie dla każdej pary trzeci element wyznaczony przez tę parę mieści się w zbiorze $[n]$).

Z nierówności Boole'a

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{S\in\mathfrak{S}} A_s\Big) \leq \sum_{S\in\mathfrak{S}} \mathbf{P}(A_s) \leq \binom{n}{2} 2^{1-k}.$$

Dowód:

Na pewno liczba wszystkich ciągów nie będzie większa niż $\binom{n}{2}$ (będzie oczywiście mniejsza - TO WIDAĆ - ponieważ nie dla każdej pary trzeci element wyznaczony przez tę parę mieści się w zbiorze $[n]$).

Z nierówności Boole'a

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{S\in\mathfrak{S}} A_s\Big) \leq \sum_{S\in\mathfrak{S}} \mathbf{P}(A_s) \leq \binom{n}{2} 2^{1-k}.$$

Przyjmijmy teraz, że

$$\binom{n}{2} 2^{1-k} < 1. \tag{2}$$

Dowód:

Wówczas

$$0 < 1 - \mathbf{P}\Big(\bigcup_{S\in\mathfrak{S}} A_s\Big) = \mathbf{P}\Big(\overline{\bigcup_{S\in\mathfrak{S}} A_s}\Big) = \mathbf{P}\Big(\bigcap_{S\in\mathfrak{S}} \overline{A}_s\Big),$$

przy czym ostatnia nierówność zachodzi na mocy prawa de Morgana.

Dowód:

Pokazaliśmy, że zdarzenie

$$B = \bigcap_{S \in \mathfrak{S}} \overline{A}_s$$

ma dodatnie prawdopodobieństwo, a więc $B \neq \emptyset$.

Dowód:

Pokazaliśmy, że zdarzenie

$$B = \bigcap_{S \in \mathfrak{S}} \overline{A}_S$$

ma dodatnie prawdopodobieństwo, a więc $B \neq \emptyset$.

Innymi słowy, w zbiorze zdarzeń elementarnych istnieje 2-kolorowanie zbioru $[n]$, dla którego zdarzenie B zachodzi, to znaczy istnieje 2-kolorowanie zbioru $[n]$, dla którego żaden ciąg arytmetyczny o długości k nie jest monochromatyczny.

Dowód:

Pokazaliśmy, że zdarzenie

$$B = \bigcap_{S \in \mathfrak{S}} \overline{A}_s$$

ma dodatnie prawdopodobieństwo, a więc $B \neq \emptyset$.

Innymi słowy, w zbiorze zdarzeń elementarnych istnieje 2-kolorowanie zbioru $[n]$, dla którego zdarzenie B zachodzi, to znaczy istnieje 2-kolorowanie zbioru $[n]$, dla którego żaden ciąg arytmetyczny o długości k nie jest monochromatyczny.

Zatem, jeżeli $\binom{n}{2}2^{1-k} < 1$, to $W(k)$ musi być większe od przyjętej liczby elementów n, tj.

$$W(k) > n \tag{3}$$

Dowód:

Nierówność

$$\binom{n}{2} 2^{1-k} < 1$$

jest równoważna nierówności

$$n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1/2} < 2^{k/2},$$

która jest spełniona np. dla $n = \left\lfloor 2^{k/2} \right\rfloor$ (należy to czytać jako równość, która jest spełniona przez największą liczbę całkowitą mniejszą bądź równą liczbie $2^{k/2}$). Podstawiając tę liczbę do nierówności (3) otrzymujemy tezę twierdzenia. ■

Rozważmy zmienne losowe - indykatory zbioru (tu indykatory zdarzeń) dla zbiorów A_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$

$$I_{A_i} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } \omega \in A_i, \\ 0, & \text{jeśli } \omega \notin A_i. \end{cases}$$

Rozważmy zmienne losowe - indykatory zbioru (tu indykatory zdarzeń) dla zbiorów A_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$

$$I_{A_i} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } \omega \in A_i, \\ 0, & \text{jeśli } \omega \notin A_i. \end{cases}$$

Niech

$$X = \sum_i I_{A_i}.$$

Rozważmy zmienne losowe - indykatory zbioru (tu indykatory zdarzeń) dla zbiorów A_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$

$$I_{A_i} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } \omega \in A_i, \\ 0, & \text{jeśli } \omega \notin A_i. \end{cases}$$

Niech

$$X = \sum_i I_{A_i}.$$

Wówczas

$$E(X) = E\left(\sum_i I_{A_i}\right) = \sum_i E(I_{A_i}) = \sum_i P(A_i).$$

Rozważmy zmienne losowe - indykatory zbioru (tu indykatory zdarzeń) dla zbiorów A_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$

$$I_{A_i} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } \omega \in A_i, \\ 0, & \text{jeśli } \omega \notin A_i. \end{cases}$$

Niech

$$X = \sum_i I_{A_i}.$$

Wówczas

$$E(X) = E\left(\sum_i I_{A_i}\right) = \sum_i E(I_{A_i}) = \sum_i P(A_i).$$

Ostatecznie, jeśli

$$\sum_i P(A_i) < 1,$$

to

$$E(X) < 1.$$

Niech $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną, a X zmienną losową w tej przestrzeni.

Niech $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną, a X zmienną losową w tej przestrzeni.

Jeśli

$$E(X) = k,$$

to istnieją takie $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, że

$$X(\omega_1) \leq k \qquad \text{oraz} \qquad X(\omega_2) \geq k.$$

Z powyższych faktów wynika więc, że istnieje $\omega \in \Omega$, dla którego

$$X(\omega) < 1.$$

Ponieważ zmienna losowa X przyjmuje tylko wartości całkowite nieujemne, to

$$X(\omega) = 0, \text{ a zatem } \omega \in \bigcap_i \overline{A}_i,$$

a stąd

$$\bigcap_i \overline{A}_i \neq \emptyset.$$

Załóżmy, że mamy graf pełny K_n. Niech $n \to (k, l)$ oznacza, że kolorując krawędzie grafu K_n dwoma kolorami: czerwonym i niebieskim, zawsze znajdziemy k-wierzchołkowy podgraf pełny o wszystkich krawędziach czerwonych lub l-wierzchołkowy podgraf pełny o wszystkich krawędziach niebieskich.

Załóżmy, że mamy graf pełny K_n. Niech $n \to (k, l)$ oznacza, że kolorując krawędzie grafu K_n dwoma kolorami: czerwonym i niebieskim, zawsze znajdziemy k-wierzchołkowy podgraf pełny o wszystkich krawędziach czerwonych lub l-wierzchołkowy podgraf pełny o wszystkich krawędziach niebieskich.

Definicja.

Niech $k, l \in \mathbb{N}_2$. Najmniejszą liczbę naturalną n taką, że $n \to (k, l)$, nazywamy *liczbą Ramseya* i oznaczamy $R(k, l)$.

$R(3,3)$ - kolorowe trójkąty

Pięciokąt

$R(3,3)$ - kolorowe trójkąty

Pięciokąt

Wśród 5 osób żadne 3 nie znają się nawzajem i żadne 3 nie są sobie obce

$R(3,3)$ - kolorowe trójkąty

Pięciokąt

Wśród 5 osób żadne 3 nie znają się nawzajem i żadne 3 nie są sobie obce

$R(3,3) > 5$.

$R(3,3)$

$$R(3,3) \leq 6.$$

$R(3,3)$

$R(3,3) \leq 6.$

Ostatecznie więc

$$R(3,3) = 6.$$

Wiemy, że

$$R(3,3)=6,\qquad R(3,4)=9,\qquad R(3,5)=14,\qquad R(3,6)=18,$$

$$R(3,7)=27,\qquad R(4,4)=18,\qquad R(4,5)=25.$$

oraz

$$42\leq R(5,5)\leq 48.$$

Twierdzenie.

Dla każdego naturalnego $k \geq 3$

$$R(k,k) > \frac{k}{e\sqrt{2}} 2^{k/2}.$$

Dowód.

Załóżmy, że kolorujemy krawędzie grafu pełnego K_n zgodnie z rozkładem klasycznym (z jednakowym prawdopodobieństwem dana krawędź może być czerwona jak i niebieska). Zatem dla każdego $\omega \in \Omega$

$$P(\{\omega\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{n}{2}}.$$

Niech S będzie ustalonym zbiorem k wierzchołków w grafie K_n. Oznaczmy przez A_S zdarzenie, że wszystkie krawędzie o obu końcach w S są tego samego koloru.

Dowód.

Z niezależności mamy

$$P(A_S) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{n}{2}},$$

a zatem

$$P\left(\bigcup_S A_S\right) \leq \sum_S P(A_S) = \binom{n}{k} \cdot 2^{1-\binom{n}{2}}$$

Dowód.

Niech X_S będzie indykatorem zdarzenia A_S. Zmienna losowa

$$X = \sum_S X_S$$

jest liczbą k-elementowych podzbiorów wierzchołków w grafie pełnym K_n o monochromatycznych krawędziach.

Dowód.

Wówczas

$$E(X_S) = P(A_S) = 2^{1-\binom{k}{2}},$$

czyli

$$E(X) = \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Istnieje więc zdarzenie elementarne - 2-kolorowanie grafu K_n - takie, że

$$X(\omega) \leq \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Przy założeniu, że

$$\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1,$$

mamy ostatecznie

$$X(\omega) < 1, \qquad \text{oraz} \qquad \bigcap_S \overline{A}_S \neq \emptyset.$$

Stąd zaś wynika, że istnieje element przestrzeni probabilistycznej - 2-kolorowanie krawędzi grafu K_n - dla którego żaden podzbiór na k wierzchołkach nie ma krawędzi tego samego koloru, czyli

$$R(k,k) > n.$$

Stąd zaś wynika, że istnieje element przestrzeni probabilistycznej - 2-kolorowanie krawędzi grafu K_n - dla którego żaden podzbiór na k wierzchołkach nie ma krawędzi tego samego koloru, czyli

$$R(k,k) > n.$$

Inżynierowie z Politechniki policzyli, że

$$R(k,k) > \frac{k}{e\sqrt{2}} 2^{k/2}.$$

Definicja.

Niech A będzie pewnym przedziałem zbioru $\mathbb{R}$. Modułem ciągłości funkcji $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy

$$\sup_{x,y\in A, |x-y|<\delta} |f(x) - f(y)|, \qquad \text{gdzie} \quad \delta > 0$$

i oznaczamy $m(f, \delta)$.

Moduł ciągłości jest nieujemną liczbą lub $+\infty$.

Gdy funkcja jest ograniczona, to

$$m(f, \delta) < \infty.$$

Twierdzenie.

Każdą funkcję ciągłą f na odcinku $[0,1]$ można jednostajnie przybliżać ciągiem wielomianów Bernsteina

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Niech $M = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| < \infty$, bo funkcja f jest ograniczona.

Niech $M = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| < \infty$, bo funkcja f jest ograniczona.

Ustalmy $x \in [0, 1]$. Niech S_n będzie zmienną losową o rozkładzie Bernoulliego z parametrami n, x. Wtedy

$$E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = B_n(x)$$

Niech $M = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| < \infty$, bo funkcja f jest ograniczona.

Ustalmy $x \in [0,1]$. Niech S_n będzie zmienną losową o rozkładzie Bernoulliego z parametrami n, x. Wtedy

$$E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = B_n(x)$$

i z nierówności Czebyszewa-Bienaymé mamy

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > n^{-\frac{1}{4}}\right) \leq \frac{1}{4n^{\frac{1}{2}}}.$$

▸ Nierówność Czebyszewa-Bienaymé

Stąd otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
|f(x) - B_n(x)| &\leq \sum_{\{k : \left|\frac{k}{n} - x\right| \leq n^{-\frac{1}{4}}\}} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&+ \sum_{\{k : \left|\frac{k}{n} - x\right| > n^{-\frac{1}{4}}\}} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq m(f, n^{-\frac{1}{4}}) + 2M \cdot P\left(\left| \frac{S_n}{n} - x \right| > n^{-\frac{1}{4}} \right) \\
&\leq m(f, n^{-\frac{1}{4}}) + \frac{M}{2n^{\frac{1}{2}}},
\end{aligned}
$$

gdzie prawa strona nie zależy od x.

Ponieważ funkcja f jest ciągła na odcinku $[0,1]$, więc jest jednostajnie ciągła, a zatem

$$\lim_{\delta \to 0} m(f, \delta) = 0.$$

Ponieważ funkcja f jest ciągła na odcinku $[0,1]$, więc jest jednostajnie ciągła, a zatem

$$\lim_{\delta\to 0} m(f,\delta) = 0.$$

Mamy więc

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - B_n(x)| = 0.$$

■

Dziękuję za uwagę!!!

Twierdzenie (nierówność Czebyszewa-Bienaymé).

Jeżeli zmienna losowa X ma rozkład ziarnisty, przyjmuje tylko nieujemne wartości i posiada wartość oczekiwaną $E(X)$, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$

$$P\left(|X - E(X)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D^2(X)}{\varepsilon^2}.$$

Dowód Twierdzenia Bernsteina